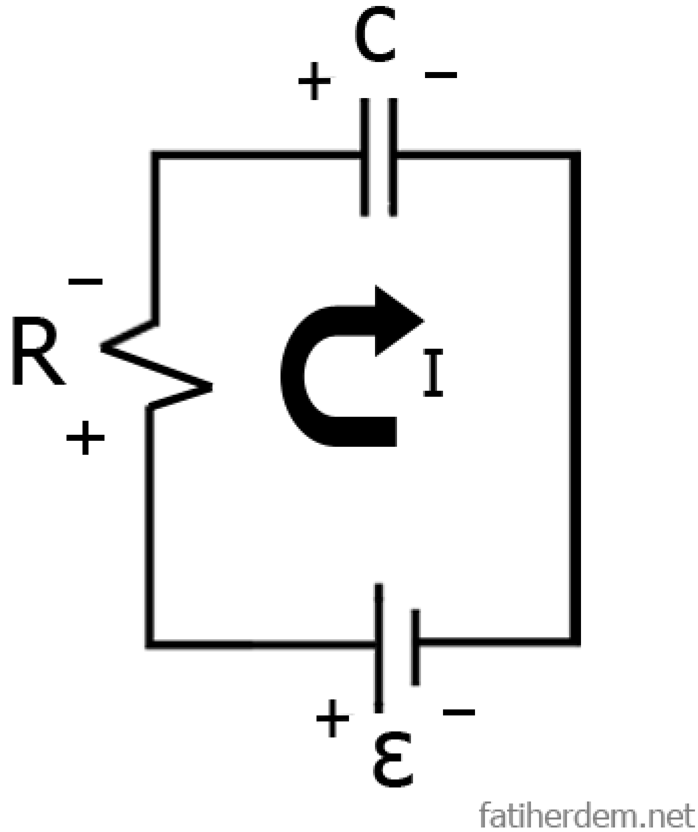



Merhaba arkadaşlar bu yazıda RC devrelerinin analizini yapmaya çalışacağız, analizimiz çok kapsamlı olmayacak, genellikle kitaplara formül olarak düşülen denklemlerin aslında basit bir birinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümünden türediğini göreceğiz. RC devrelerinde adından da anlaşıldığı üzere ve yukarda da resmi görüldüğü üzere seri bağlı direnç ve kapasiteden oluşan bir devrenin davranışı incelenir. Biz bu basit devrenin analizinde devre analizinin en temel kanunlarından olan KVL yani kirchoff voltaj yasasını kullanacağız.

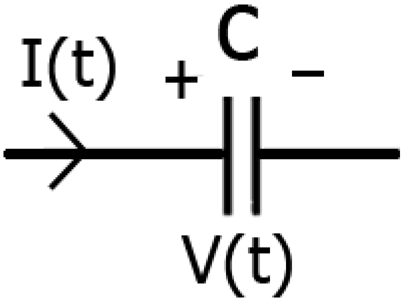
I yönünde bir KVL dönersek;

**1)** $-\,\mathcal{E} + I(t)R + V(t) = 0$ olur. Burdaki I(t) t anında devrede dolaşan akım ve V(t) t anındaki kapasite gerilimidir.

Kapasitenin tanım denkleminin

**Q= C. V** olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın t ye göre türevini aldığımızda:

**dq/dt = C . dV(t)/dt** olur. Yani t anındaki kapasite akımının voltajı cinsinden değeri;



**$I(t) = C \cdot dV(t)/dt$** olur. Buna göre KVL den yazdığımız ilk eşitlik

## 2) $-\varepsilon + C.\, dv(t)/dt\, .\, R + V(t) = 0$ haline gelir.

kolaylık olamsı açısından **$dV(t)/dt$** ifadesi yerine **V'** yazarsak eşitliğimiz:

**3) $C.R.V' + V = \varepsilon$** haline gelir ki bu denklem görmeye alışık olduğumuz diferansiyel denklem modellerindendir. Bu denklemi birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem(first order linear dif. equ) olarak düşünüp çözebileceğimiz gibi(integral faktörü bularak) yüksek mertebeli diferansiyel denklem çözüm yöntemlerinden birini kullanarak da çözebiliriz. Tabi burada bir mesele de

**$\varepsilon$** un yani devremizin kaynağının nasıl bir davranış gösterdiğidir. Kaynağımızın zamana bağlı değişim gösteriyor olup olmaması çözümümüzü değiştirecektir. Bu yazıda sabit kaynaklı devreleri değerlendirdiğimiz için kaynağımızın sabit olduğunu düşünerek 3 nolu denklemimizi çözelim (Kaynağımız 3V, 5V gibi bir değerde sabit).

Diferansiyel denklemimizin çözümünün $Y=Y_h + Y_p$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Burda $Y_h$ , V(t) nin geçici(transient response) tepkisi, $Y_p$ V(t) nin kalıcı(steady-state response) tepkisini göstermektedir.Çözümü bulduğumuzda t sonsuza giderken geçici etkinin ortadan kalktığını, kalıcı tepkinin devam ettiğini göreceğiz. Önce **$Y_h$** i bulalım:

**$Y_h$:**

**$C.R.V' + V = 0$**

**$V = c_1 . e^{r t}$**

**$V' = c_1 . r . e^{r t}$** bu iki ifadeyi yukarda yerine yazdığımızda:

**$c_1 . e^{r t} ( C. R .r + 1 ) = 0$ ise $C.R.r = -1$**

**$r = - 1/ R.C$** bu durumda **$Y_h$** (homojen kısmın çözümü):

**$Y_h = c_1 . e^{-t/RC}$** olur.($c_1$ sabit bir sayıyı temsil ediyor, kapasite sığası C ile bir ilgisi yok.)

Sıra **$Y_p$:** ın çözümüne geldi, yöntem olarak bilinmeyen katsayılar yöntemi (method of undetermined coefficients) kullanabiliriz, zaten kaynağımız da sabit olduğu için işimiz oldukça kolay. Sağ tarafta 0. dereceden bir polinom gördüğüm için yöntem gereği önereceğim $Y_p$= A olacaktır. Yerine yazıp A yı çektiğimizde($Y_p$' 0 olur ve $Y_p$ direkt $\varepsilon$ a eşit olur)

**$Y_p$:**

**$Y_p = \varepsilon$ .** Bu durumda genel çözümümüz $Y_h + Y_p$ ve de orijinal denklemimize uyarlarsak;

**$V(t) = c_1 . e^{-t/RC} + \varepsilon$** olur. Burda $c_1$ sabitini bilmiyoruz, bulabilmemiz için bir başlangıç değerine sahip olmamız gerekir( yani herhangi bir t anındaki V(t) yi biliyor olmalıyız ).

$V(0) = V_0$ olarak bildiğimizi varsayalım, genelde 0 anındaki değer verilir veya bulunur.

$V(0) = c_1 + \varepsilon = V_0$ olacağından

$c_1 = V_0 - \varepsilon$ olur. $c_1$ i yerine yazdığımızda:

$\mathbf{V(t)} = (V_0 - \varepsilon).\ \mathbf{e^{-t/RC}} + \varepsilon$ olduğunu buluruz. Böylece bu devrede kapasitemizin geriliminin zamana bağlı davranışını ifade etmiş olduk.

Şimdi de bu sonucu biraz yorumlamaya çalışalım:

t=0 anında kapasite gerilimimiz V(0), eşitliğimizde t yerine 0 yazarsak:

$V(0) = (V_0 - \varepsilon).\ e^{-0/RC} + \varepsilon = V_0 - \varepsilon + \varepsilon = V_0$ bu sonuç bizi şaşırtmadı çünkü biz hesaplama yaparken kapasitenin 0 anında bir $V_0$ gerilimine sahip olduğunu varsaymıştık. $V_0$ gerilimimiz 0 da olabilir, yani kapasitemizin başlangıç gerilimi olmak zorunda değil.

V(t) nin gidişatına baktığımızda eksponensiyel azalmanın olduğu $(V_0 - \varepsilon)$ ifadesinin giderek etkisinin azalacağını ve t = sonsuz olduğunda sadece $\varepsilon$ değerinin kalacağını görürüz. Nitekim t yerine 0 yazdığımız gibi sonsuz yazarsak V(sonsuz)=$\varepsilon$ olduğunu görürüz. Anlaşıldığı üzere ekponensiyel kısım sadece bir süre etkisini gösterdikten sonra etkisini kaybedecek ve **kapasite gerilimi** -kaynak varlığını sürdürdüğü müddetçe- **$\varepsilon$ olarak kalacaktır**. Ne kadar bir süre? Yukarda da söylediğimiz gibi ekponensiyel kısım ancak sonsuzda 0 olur ve etkisinin tamamen yitmesi için sonsuza kadar beklememiz gerekir :), ancak 5RC kadar vakit geçtiğinde $\mathbf{e^{-5RC/RC}}$ ifadesinin alacağı değer çok küçük olacağından 0 olduğu ve artık etki etmediği kabul edilir, yani sorumuzun cevabı 5RC saniyelik bir süre. Bu zaman miktarı aynı zamanda 5 zaman sabiti kadar olarak adlandırılır, yani bir RC devresinde **zaman sabitimiz RC miktarı** kadardır. "Zaman sabitinin birimi nasıl saniye olabilir?" sorusu akıllara gelmiş olabilir, şöyle: kapasite tanım bağıntımız Q=C.V idi, bu durumda C nin birimi coulomb / V dir. RC nin birimi ise ohm*coulomb/V dir. Ohm/V nin 1/A (bir bölü amper) olduğunu ohm yasasından biliyoruz. Bu durumda RC nin birimi coulomb/A oldu. Akımın tanım bağıntısın dQ/dt olduğunu biliyoruz, yani akımın birimi aynı zamanda coulomb/t dir. Bu durumda RC nin birimi coulomb/(coulomb/t) olacağından RC miz saniye cinsinden bir değer olacaktır(akım bağıntısında dQ/dt deki Q coulomb t de saniye cinsindendir).

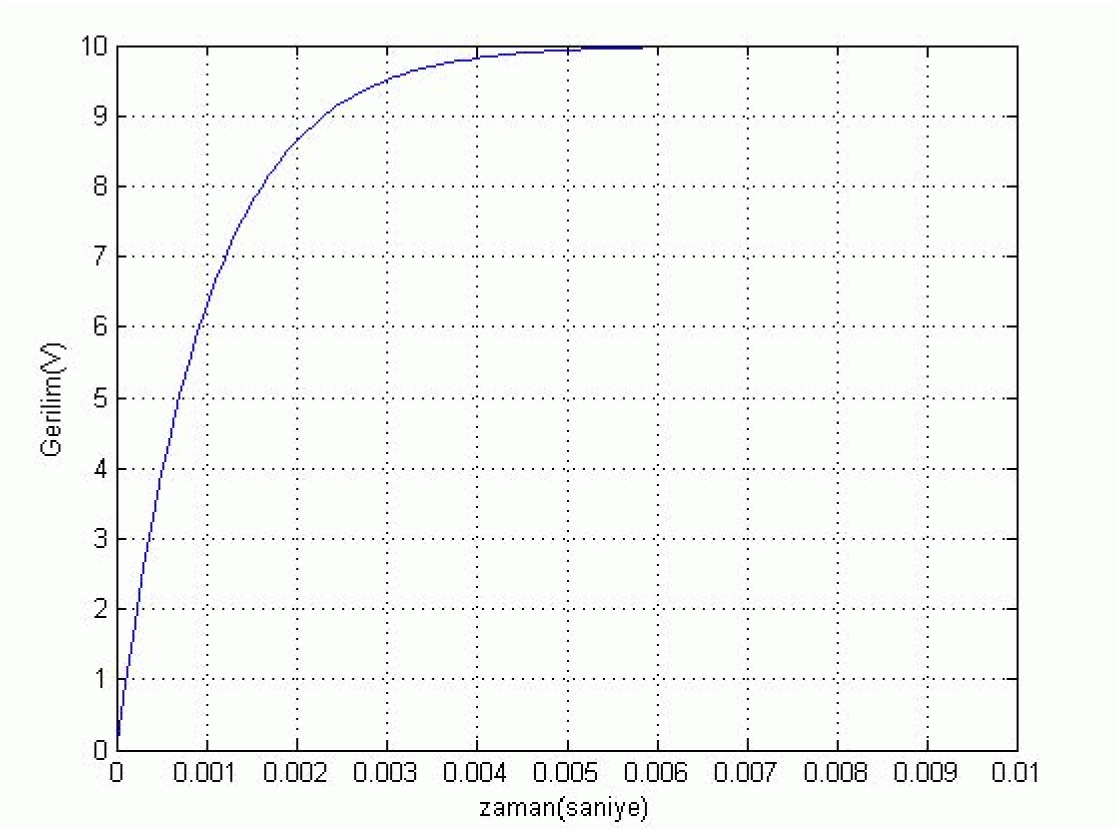
Hatırlayacağınız üzere V(t) nin ekponensiyel azalmanın olduğu kısmını ilk yazdığımız diferansiyel denklemin(3 nolu denklem) homojen çözümden; $\varepsilon$ u bulduğumuz kısmı da diferansiyel denklemimizin particular(kısmi) çözümünden bulmuştuk. **Homojen** ve **particular** ifadeleri matematiksel ifadelerdir, bu ifadelerin devremizdeki karşılıkları ise sırasıyla, **geçici** ve **sürekli hal tepkisi** dir. Burada geçici hal: $(V_0 - \varepsilon).\ \mathbf{e^{-t/RC}}$ ifadesinden gelmekte, kalıcı hal ise $\varepsilon$ ifadesinden gelmektedir, umarım neden geçici ve kalıcı dediğimiz anlaşılmıştır. Şimdi isterseniz sonucumuzu görselleştirebilmek için kapasitemizin gerilimin zamana göre değişimini veren ifadenin yani $\mathbf{V(t)} = (V_0 - \varepsilon).\ \mathbf{e^{-t/RC}} + \varepsilon$ matlab yardımıyla grafiğini çizelim.

Grafiğimizi çizdirmeden önce nasıl bir grafikle karşılaşırız sorusuna cevap aramakta fayda var.İlk durumda kapasitemizdeki gerilimin 0 olduğunu yani olmadığını düşünelim, her şeyden önce ilk değerimizin **0** ve son değerimizin **$\varepsilon$** olacağını denklemimize baktığımızda görebiliyoruz ve 5RC zamana kadar bir geçiş(artış) olacak(5RC zamandan sonra çok az bir artış sonsuza kadar devam edecek ancak biz o artışı ihmal ediyoruz) ve sonrasında kapasite gerilim **$\varepsilon$** olarak kalacaktır. Yukarda bulduğumuz V(t) ifadesinden çıkarmamız gereken en önemli sonuçlardan bir tanesi de: **Kapasite gerilimi hiç bir zaman sıçrama yapmıyor yani 0 zamanda 3V gibi bir gerilimden 5V gibi bir gerilime atlamıyor, atlayamaz**. Bunu kapasitemizin fiziksel yapısını inceleyerek anlayabiliriz: 0 zamanda yükler yer değiştiremez, yüklerin kapasitenin yüzeylerine gelebilmesi için belirli bir zaman geçmesi gerekir. Yeri gelmişken durum değişkeni-state variable- kavramından bahsedelim: Kapasite geriliminin ani değişememesi sebebiyledir ki kapasite elemanının **durum değişkeni(state variable)** voltajıdır, durum değişkeni kabaca "o elemanın o anki durumunu en iyi özetleyen bir değişkendir" şeklinde tanımlanır(durum değişkenleri elemanların bellekleriyle ilgilidir, kapasite belleği-hafızası- olan bir elemandır ve belleğinde voltaj değerini tutar). Eğer kapasitenin durum değişkenine akımıdır demeye kalkacak olursak aşağıda göreceğimiz gibi bir anda 0 A den 5 A gibi bir değere çıkabilen bir durum değişkeni bize ne ifade edebilir!

$V_0$= 0, kaynağımız **ε**=10V, R=10k ohm C=0.1 uF (RC zaman sabitimiz= 10000ohm * 0.1 uF = 1 ms oldu)

Beraber çizdirelim, Matlab'ı açalım:
t=0:0.0001:10*0.001 yazarak 0 dan 10 milisaniyeye kadar 100 değer oluşturalım.(5. ms de kapasitemizin  hemen hemen dolacağını biliyoruz )
Formülümüzü yazalım:
V=(0-10)*exp(-t/10^-3)+10
ve çizdirelim:
plot(t,V)
Eksenlerimize isimlerini verelim:
xlabel('zaman(saniye)')
ylabel('Gerilim(V)')
grid

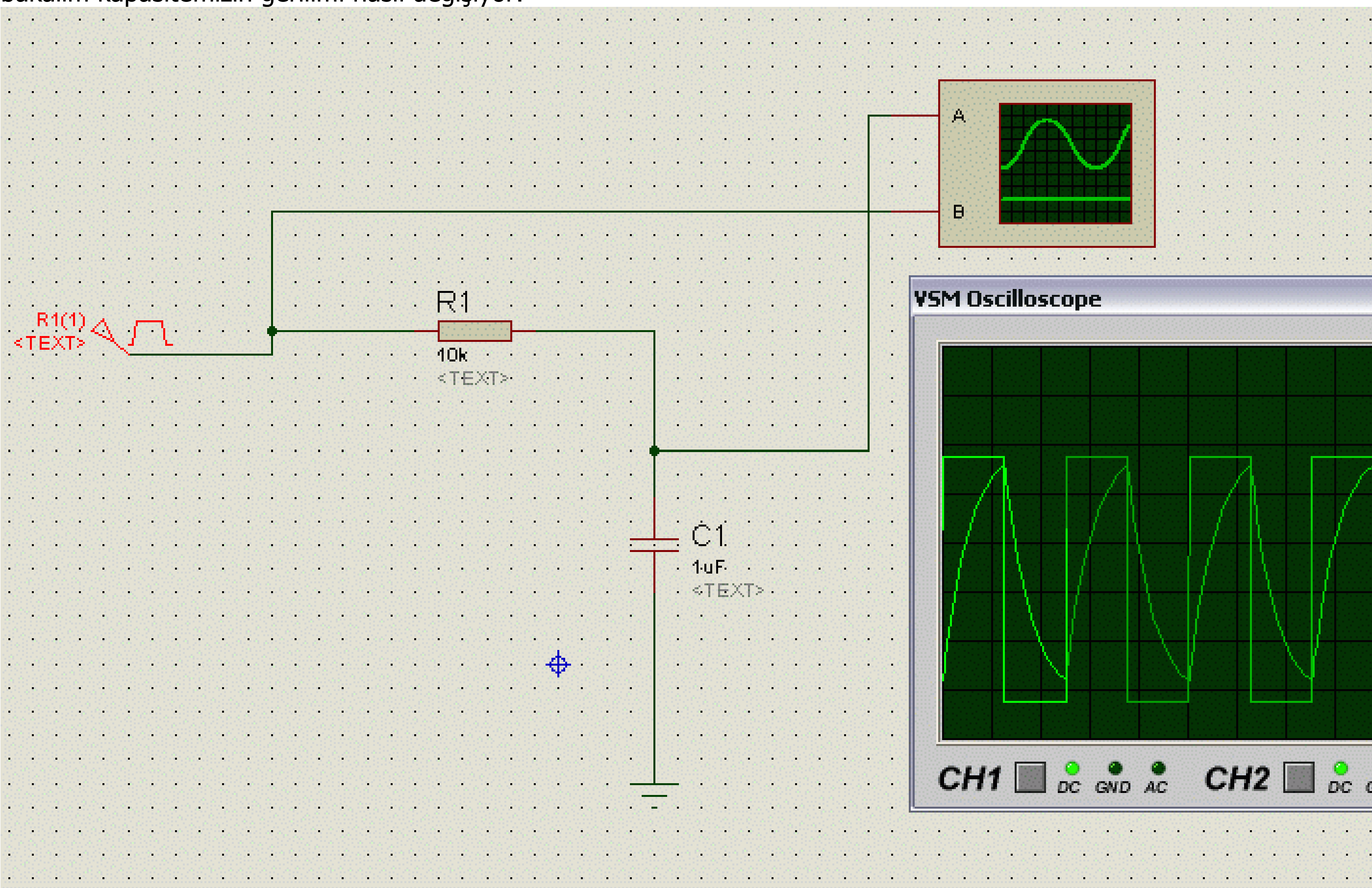
Dediğimizde grafiğimiz:




şeklinde çıkmış olmalı, görüldüğü gibi 5RC zamanda (5.ms) kapasitemiz hemen hemen dolmuş, **ε**=10V değerine ulaşmıştır. RC kadar zamanda kapasitemiziz %63 ü dolmuş olur, yani kapasitemiz 6,3 V a dolmuştur.(Bunu eşitliğimizde t yerine RC yazarak kolayca bulabiliriz) .

**Neticeten kapasite olarak adlandırdığımız devre elemanımız nasıl davranıyor?**
Uçları arasındaki gerlimi ani değişemiyor(0V iken 5V olamıyor mesela) ancak geçirdiği akım ani-bir anda- değişebiliyor, nitekim devremize kaynağımızı bağlamadan önce akımı 0 iken bağladığımız anda

**$\varepsilon/R$** değerine çıkıyor ve zamanla azalıyor ve sonra sıfır oluyor. Yani kapasitemiz ilk anda geçirebileceği max akımı geçiriyor, 5RC zaman sonra gerilimi kendisini besleyen kaynakla aynı olacağı için akım duruyor, 0 oluyor, çünkü gerilim farkı kalmıyor. Belki biraz genel bir cümle olacak ama: kapasitemiz t=0 anında kısa devre gibi t>5RC zamanında açık devre gibi davranır diyebiliriz(t=0 anında kısa devre gibi davranması başlangıçtaki V(0)=0 olmasına bağlıdır, buradaki t=0 durumu çok göreceli olduğundan kesin bir şey söylemek mümkün değildir ancak cümlemizi şöyle netleştirebiliriz: **t=0 anında boş olduğu bilinen bir kapasite t=0 anında kısa devre gibi t>5RC zamanında açık devre gibi çalışır diyebiliriz** ). Kapasite gerilimimiz ani yükseliş yapamayacağı gibi ani düşüş de yapamıyor. Şimdi de ani değişimli bir kaynağı(kare dalga üreten) RC devremize uygulayalım ve bakalım kapasitemizin gerilimi nasıl değişiyor:




Görüldüğü gibi kare dalgamız max değerine aniden çıkmasına rağmen kapasite gerilimimiz hemen yetişemiyor(5RC zaman gerekiyor) ve kare dalgamız 0 a düştüğünde de kapasite gerilimimiz hemen sıfıra düşemiyor.

Kapasitemizin geriliminin zamana göre değişimini bir üstte çizdirdik, peki akımı? Yukarda ilk anda max olduğunu sonra 0 a kadar azaldığını söyledik. Şimdi de yine Matlab yardımıyla (yukarda verdiğimiz değerlerle) kapasitemizin akımının zaman göre değişimini çizdirelim.

Değerlerimiz şöyleydi:

$V_0$= 0, kaynağımız **Ɛ**=10V, R=10k ohm C=0.1 uF (RC zaman sabitimiz= 10000ohm * 0.1 uF = 1 ms oldu)

Bunun için önce akımın zaman bağlı değişimini veren ifadeyi bulalım.

Kapasitemizin akımının:

**I(t) = C . dV(t)/dt** olduğunu biliyoruz, o zaman önceden yazmış olduğumuz V(t) ifadesinin t ye göre bir defa türevini alıp C ile çarptığımızda i(t) ifadesini bulabiliriz.

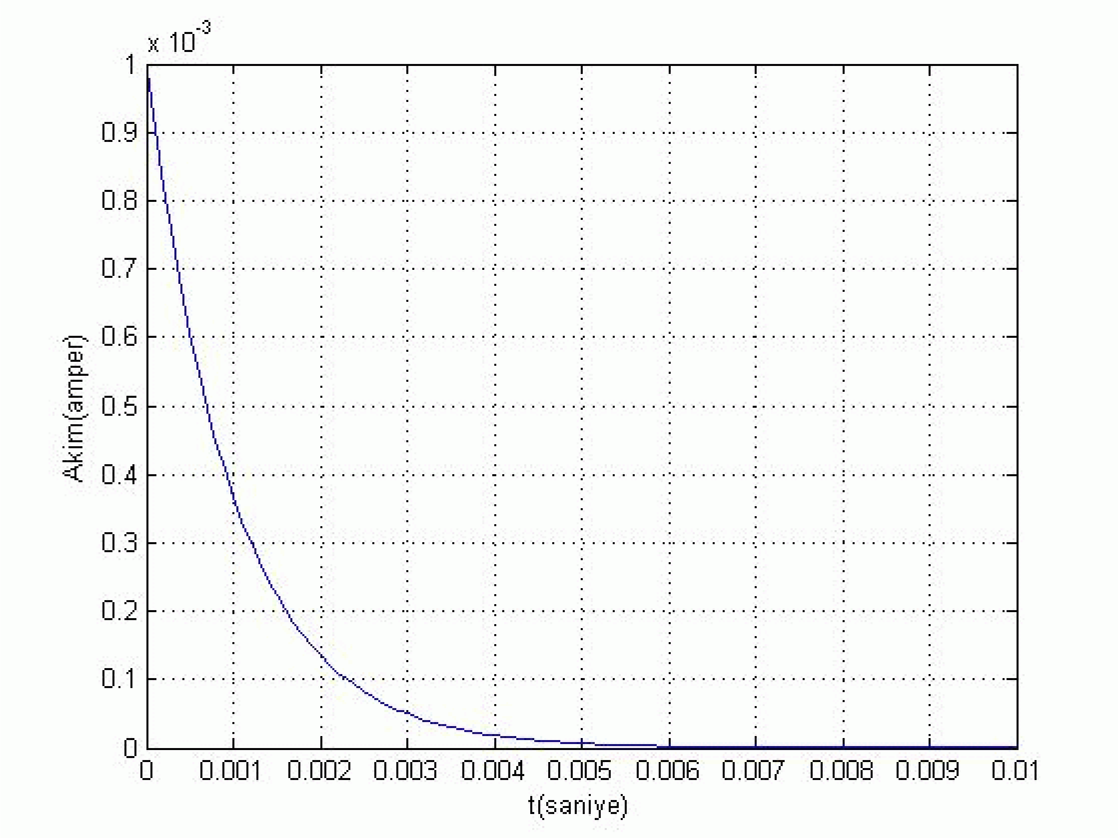
V(t) miz
V=(0-10)*exp(-t/10^-3)+10 idi.
Bu durumda:

i(t)=C*-10*exp(-t/10^-3)/ (-1/10^-3) olur , yani:
i=0.1*10^-6*-10*exp(-t/10^-3)*(1/(-1/10^-3)) olur(ifade biraz karışık görünüyor ancak yaptığımız iş V(t) yi türetip C ile çarpmak).

i=0.1*10^-6*-10*exp(-t/10^-3)*(-1/10^-3) ifadesini matlaba verip t ye bağlı değişimini çizdirmek istediğimizde;

plot(t,i)

grid dediğimizde grafiğimiz:




şeklinde olur, görüldüğü gibi t=0 anında akımımız 10V/10k dan 10^-3 amper yani 10ma.

Akımımız 10 mA den başlayıp(0 anında 0 amperden 10 mA e ani bir çıkış var, demek ki kapasite akımı ani değişim gösterebiliyormuş.) 5RC saniye sonra -kapasite gerilimimiz 10V a ulaştığı için- 0 a düşüyor.

Şimdilik bu kadar… iyi çalışmalar dilerim.